Richtlinien
zur Veröffentlichung der Aufgaben der ersten Runde im Internet

Um eine weite Verbreitung der Aufgaben der ersten Runde der Mathematik-Olympiade zu erreichen und die Arbeit der Organisatoren zu erleichtern, kann eine Veröffentlichung der Aufgaben im Internet während der Bearbeitungszeit hilfreich sein. Diese Veröffentlichung kann nicht vor, sondern erst nach Wettbewerbsende auf der Webseite des Mathematik-Olympiaden e.V. erfolgen, da der Verein nicht Ausrichter der ersten Runde ist und sonst die ausdrücklich nicht erwünschte Möglichkeit besteht, dass Einsendungen an den Verein bzw. die Geschäftsstelle erfolgen, die dort nicht bearbeitet werden können.
Die Aufgaben dürfen vom Schuljahresbeginn bis zum Beginn der zweiten Runde lokal auf der Webseite des Veranstalters der ersten Runde (z. B. Schulhomepage) zum Download angeboten werden, wenn die nachfolgend aufgeführten Rahmenbedingungen beachtet werden.

(1) Auf der Webseite des Veranstalters muss klar zum Ausdruck kommen:
   - wer der Ausrichter des Wettbewerbs ist,
   - wer teilnahmeberechtigt ist,
   - bei wem die Lösungen abzugeben sind,
   - wann der Abgabeschluss für die Lösungen ist,
   - wie über das Ergebnis informiert wird,
   - dass eine Diskussion der aktuellen Wettbewerbsaufgaben in Internetforen untersagt ist.

   Ein Muster ist unten abgedruckt.

(2) Nach Ende der ersten Runde müssen die Aufgaben von der Webseite des Veranstalters entfernt und durch einen Link auf die Webseite des Mathematik-Olympiaden e.V. ersetzt werden:
   https://www.mathematik-olympiaden.de

(3) Die Lösungen dürfen zu keiner Zeit im Netz veröffentlicht werden.

Beispiel für eine Homepage, von der die Aufgaben der ersten Runde heruntergeladen werden können:

1. Runde der Mathematik-Olympiade 2021 an der xy-Schule in AB-Stadt

Der Wettbewerb richtet sich an alle Schülerinnen und Schüler der Klassen 5 bis 13 unserer Schule.

Die Aufgaben können bei den Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrern in gedruckter Form abgeholt oder hier (Link) heruntergeladen werden.

Lösungen können bis zum ??.??.2021 bei den Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrern (alternativ z.B. bei Herrn Müller im Lehrerzimmer) abgegeben werden.

Teilnehmerinnen und Teilnehmer erhalten am ??.??.2021 das Ergebnis durch Aushang am Informationsbrett.

Erfolgreiche Teilnehmerinnen und Teilnehmer qualifizieren sich für die 2. Runde der Mathematik-Olympiade, die am 10.11.2021 als Regionalrunde in Pi-Stadt stattfinden wird.

Eine Diskussion der aktuellen Wettbewerbsaufgaben in Internetforen ist untersagt.

Olympiadeklassen **9–10**

61. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweise: 1. *Für die Olympiadeklassen 9 und 10 stehen in der ersten Runde insgesamt sechs Aufgaben zur Verfügung, aus denen die Verantwortlichen vor Ort eine geeignete Auswahl treffen können. Wenn die erste Runde als Hausaufgabenwettbewerb durchgeführt wird, kann die Wahl von vier der sechs Aufgaben auch den Teilnehmenden überlassen werden.*

2. *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

611011

Bestimmen Sie alle Möglichkeiten, die Sterne in der Gleichung

$$**61*61*61 = (**61*)^2$$

so durch Ziffern von 0 bis 9 zu ersetzen, dass die Gleichung im Zehnersystem stimmt. Dabei können die Sterne durch verschiedene Ziffern ersetzt werden.

611012

Gegeben ist die lineare Funktion f mit der Gleichung $y = f(x) = 3x + 7$. Aus den Werten von f werden die Werte von z mit $z = f(a) + f(a+1) + f(2a+3)$ berechnet.

Hinweis: Zum Beispiel bedeutet $f(8a-4)$, dass man $8a-4$ in das Argument von f einsetzen muss. Also $f(8a-4) = 3 \cdot (8a-4) + 7 = 24a - 5$.

a) Bestimmen Sie einen Term für z in Abhängigkeit von a, der das Symbol f nicht mehr enthält.

b) Gibt es eine natürliche Zahl a, für die $z = 10^{2021}$ gilt?

c) Gibt es eine natürliche Zahl a, für die z durch 2021 teilbar ist?

d) Gibt es eine natürliche Zahl a, für die z (im üblichen Zehnersystem) eine 2021-stellige Zahl mit 2021 gleichen Ziffern ist?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

611013

a) Bestimmen Sie alle reellen Zahlen z mit der Eigenschaft, dass für alle positiven ganzen Zahlen n die Ungleichung $n \cdot z < 2021$ gilt.

b) Bestimmen Sie alle reellen Zahlen z mit der Eigenschaft, dass für alle positiven ganzen Zahlen n die Ungleichung $\frac{2n+1}{3n+2} < z$ gilt.

611014

Das Viereck $ABCD$ sei ein Parallelogramm, bei dem der Abstand der parallelen Geraden AB und CD gleich 6 ist. E und F seien die Mittelpunkte der Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$. Die Gerade DE schneide die Strecke $\overline{BF}$ im Punkt P und die Gerade AB im Punkt Q.

a) Zeigen Sie, dass $|AQ| = 2\,|AB|$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass P auf der Geraden AC liegt und bestimmen Sie die Länge des Abstands von P zur Geraden AB.

611015

Zum Test des räumlichen Vorstellungsvermögens sind die Seitenflächen eines Würfelnetzes mit „links“, „rechts“, „oben“, „unten“, „vorn“ und „hinten“ zu beschriften. Nach dem Zusammenbau des Würfels legt man ihn auf den Tisch und untersucht die Beschriftung. Pro richtig beschrifteter Fläche gibt es einen Punkt.

Zur Bepunktung wird der Würfel natürlich so gedreht, dass es möglichst viele Punkte gibt.

Welche Punktzahlen sind möglich (und welche nicht), wenn bekannt ist, dass wirklich die sechs Worte „oben“, „unten“, „vorn“, „hinten“, „links“ und „rechts“ verwendet wurden und jedes Quadrat des Würfelnetzes genau eines dieser Worte enthält?

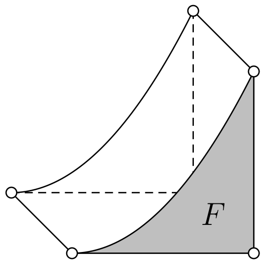
611016

Für diese Aufgabe wird das **Cavalieri'sche Prinzip** als bekannt vorausgesetzt. Es besagt für zwei Körper K_1 und K_2:

> Wenn jede zu einer gegebenen Ebene E parallele Ebene E' die Körper K_1 und K_2 in Flächen gleichen Inhalts schneidet, dann haben diese Körper das gleiche Volumen.

In einem ebenen kartesischen x-y-Koordinatensystem betrachten wir die Fläche F, die aus denjenigen Punkten $P(x, y)$ besteht, deren Koordinaten x und y die Ungleichungen $0 \leq x \leq 1$ und $0 \leq y \leq x^2$ erfüllen. Im Raum betrachten wir weiterhin den allgemeinen Zylinder Z mit Höhe 1 und Grundfläche F, der entsteht, wenn man F um 1 senkrecht zur x-y-Ebene verschiebt (siehe Abbildung A 611016). Außerdem ist eine gerade Pyramide K der Höhe 1 gegeben, deren Grundfläche ein Quadrat der Seitenlänge 1 ist.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!



A 611016

a) Zeigen Sie, dass Z und K das gleiche Volumen haben.

b) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche F.

Hinweis: Ein Nachweis der Volumengleichheit der oben beschriebenen Körper ist hier möglich, wenn man eine geeignete Lage der Körper im Raum und eine Ebene E findet, um das Cavalieri'sche Prinzip anzuwenden.

Wir verwenden in dieser Aufgabe einen **erweiterten Begriff des Zylinders**, bei dem die Grundfläche eine beliebige Fläche sein kann (Zylinder in diesem Sinn sind also nicht nur Kreiszylinder, sondern zum Beispiel auch Dreiecksprismen). Begriffe wie Grundfläche G, Deckfläche D und Höhe h als Abstand zwischen Grund- und Deckfläche werden sinngemäß verwendet. Es gilt auch hier die bekannte Volumenformel $V = G \cdot h$.